ข้อสอบคัดเลือกเข้าศึกษาในบัณฑิตวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักสูตรปริญญาโท หรือปริญญาเอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์

วิชา **Principles of Mathematics**

ชื่อ - นามสกุล____ ________________

สมัครหลักสูตร____

คะแนนสอบ		**65**

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด **10** ข้อ คะแนนรวม **65** คะแนน จำนวน **9** หน้า

สัญกรณ์

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ แทนเซตของจำนวนนับทั้งหมด

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจากเซต X ไปยังเซต Y และ $A \subseteq X$ แล้ว กำหนดให้ $f[A]$ แทนภาพของเซต A ภายใต้ f

PART A (43 คะแนน)

1. จงเขียนข้อความต่อไปนี้เป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยห้ามใช้ $\sim, \neg, \not\forall, \nexists, \not\leq, \not<, \not>$

   1.1 ข้อความแย้งสลับที่ (contrapositive) ของ

$$(\forall x \in \mathcal{U}, x \in A \rightarrow x \in B) \rightarrow A \subseteq B$$

   <u>ตอบ</u> (3 คะแนน)

   1.2 นิเสธ (negation) ของ

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, n - 1 \leq x < n)$$

   <u>ตอบ</u> (3 คะแนน)

2. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงเขียนความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบน A ที่มี $(1, 2)$ และ $(3, 1)$ เป็นสมาชิก

   <u>ตอบ</u> (2 คะแนน)

3. ให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$ และ $P = \{\{a\}, \{b, e\}, \{c, d\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X

   ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X ซึ่ง $X/r = P$

   จงเขียนความสัมพันธ์ r แบบแจกแจงสมาชิก

   <u>ตอบ</u> (2 คะแนน)

4. ให้ $A_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$ จงหา

4.1 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =$ . . . . (1.5 คะแนน)

4.2 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n =$ . . . . (1.5 คะแนน)

พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบของข้อ 4.2 เท่านั้น (5 คะแนน)

5. จงใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์พิสูจน์ว่า $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(5 คะแนน)

6. ให้ A, B, C, D เป็นเซต

จงพิสูจน์ว่า $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times (B \setminus D)) \cup (A \setminus C) \times B$ (4 คะแนน)

7. กำหนดให้ $f\colon (\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ เป็นฟังก์ชันโดยที่

$$f(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง (8 คะแนน)

8. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ โดยที่ $a \; R \; b$ ก็ต่อเมื่อ $a \equiv b \mod 3$ และ $a \equiv b+2 \mod 4$

จงตรวจสอบว่า ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบ

8.1 R มีสมบัติสะท้อนบน $\mathbb{Z}$ (2 คะแนน)

8.2 R มีสมบัติสมมาตร (2 คะแนน)

8.3 R มีสมบัติปฏิสมมาตร (2 คะแนน)

8.4 R มีสมบัติถ่ายทอด (2 คะแนน)

PART B (22 คะแนน)

9. ให้ $f\colon A \to B$

จงพิสูจน์ว่า

9.1 $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$ สำหรับทุก $X, Y \subseteq A$ (3 คะแนน)

9.2 $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$ สำหรับทุก $X, Y \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(8 คะแนน)

10. ให้ $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

จงพิสูจน์ว่า

10.1 A ไม่มีสมาชิกเล็กสุด (3 คะแนน)

10.2 ทุก ๆ สับเซตของ A ที่ไม่ใช่เซตว่างมีสมาชิกใหญ่สุด (8 คะแนน)

ข้อสอบคัดเลือกเข้าศึกษาในบัณฑิตวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักสูตรปริญญาโท หรือปริญญาเอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์

วิชา CALCULUS

ชื่อ-นามสกุล________________________ เลขประจำตัวสอบ______________

สมัครหลักสูตร________________________ คะแนนสอบ

	35

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ จำนวน 6 หน้า (รวมปก) คะแนนรวม 35 คะแนน

2. เขียนชื่อ-นามสกุล และเลขประจำตัวสอบ ทุกหน้า

ชื่อ-นามสกุล____เลขประจำตัวสอบ________________

1. จงพิจารณาพร้อมให้เหตุผลประกอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{3n}}{8^n + 27^n}$ (2 คะแนน)

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 + n)}{\ln(n) + 8^n}$ (4 คะแนน)

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n\, n!}$ (5 คะแนน)

ชื่อ-นามสกุล____________________ เลขประจำตัวสอบ__________

2. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ประมาณค่าของ $\dfrac{2565}{99.95^2}$ (6 คะแนน)

3. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 2$ โดยกำหนดให้ $y(2) = 1$ และ $2x^2 - 3y^2 = 5$ (6 คะแนน)

4. จงหา $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (6 คะแนน)

5. จงหา $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-25}{3x^2-4x+3}\,dx$ (6 คะแนน)

ข้อสอบคัดเลือกเข้าศึกษาในบัณฑิตวิทยาลัย
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
หลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์

วิชา Abstract Algebra

วัน.......................................

เวลา 08.30 – 11.30 น.

ชื่อ - นามสกุล..

เลขประจำตัวสอบ...................................

คะแนนสอบ		**35**

<u>คำชี้แจง</u>

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน คะแนนรวม 35 คะแนน จำนวน 7 หน้า (รวมหน้าแรกนี้ด้วย)
   ตอนที่ 1 มี 3 ข้อ 10 คะแนน
   ตอนที่ 2 มี 3 ข้อ 9 คะแนน
   ตอนที่ 3 มี 3 ข้อ 16 คะแนน
2. เขียนชื่อ – นามสกุล และ เลขประจำตัวสอบ **<u>ในหน้าแรก</u>**

<u>สัญลักษณ์</u>

$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด
$\mathbb{Z}_n$ (n เป็นจำนวนเต็มบวก)	แทน $\{[a]_n : a \in \mathbb{Z}\}$ เมื่อ $[a]_n = \{a + kn : k \in \mathbb{Z}\} = \bar{a}$ สำหรับแต่ละ $a \in \mathbb{Z}$
$(S_n, \circ)$ (n เป็นจำนวนเต็มบวก)	แทนกรุปสมมาตร (symmetric group) อันดับ (order) n
$\langle a \rangle$	แทนกรุปที่ก่อกำเนิดด้วย a (group generated by a)
$\|S\|$	แทนจำนวนสมาชิกของเซต S

ตอนที่ 1 (10 คะแนน)

จงเติมเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ

1. (3 คะแนน) ในกรุป (group) $(S_6,\circ)$ กำหนดให้

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า อันดับ (order) ของ α คือ ....

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix} \text{ และ } \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

2. (4 คะแนน) กำหนดให้ G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) อันดับ 20 ที่ก่อกำเนิดด้วย (generated by) a และให้ $H = \langle a^6 \rangle$ จะได้ว่า

จำนวนสมาชิกของ H คือ ....

ตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ G คือ ....

ตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ H คือ ....

3. (3 คะแนน) ในริง (ring) $(\mathbb{Z}_{18},+,\cdot)$ จะได้ว่า

สมาชิกหน่วย (unit element) ทั้งหมด คือ..

....

ตัวหารศูนย์ (zero divisor) ทั้งหมด คือ..

....

ที่ว่างสำหรับทด

ตอนที่ 2 (9 คะแนน)

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์ยืนยันคำตอบ

4. (3 คะแนน) $\{(1),(1\ 2)\}$ เป็นกรุปย่อยปรกติ (normal subgroup) ของกรุป $(S_3,\circ)$

5. (3 คะแนน) ถ้า G เป็นกรุป (group) ที่ $|G|=5$ แล้ว G เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group)

6. (3 คะแนน) ถ้า R เป็นริงสลับที่ (commutative ring) ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ u เป็นสมาชิกหน่วย (unit element) ของ R และ z เป็นตัวหารศูนย์ (zero divisor) ของ R แล้ว uz เป็นตัวหารศูนย์ของ R

ตอนที่ 3 (16 คะแนน)

7. (6 คะแนน) กำหนดให้ G เป็นกรุป (group) สำหรับแต่ละเซตย่อย (subset) S ของ G นิยาม

$$C_G(S) = \{x \in G : xy = yx \text{ สำหรับทุก } y \in S\}$$

(7.1) จงพิสูจน์ว่า ถ้า H เป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ G แล้ว $C_G(H)$ เป็นกรุปย่อยของ G

(7.2) จงพิสูจน์ว่า $C_G(\{a\}) = C_G(\langle a \rangle)$ สำหรับแต่ละ $a \in G$

8. (5 คะแนน) กำหนดให้ R เป็นริงสลับที่ (commutative ring) ที่มี 1 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $1 \neq 0$ และ $1+1=0$ และให้ $S = \{a \in R :\ a^2 = 0\}$ จงพิสูจน์ว่า S เป็นไอดีล (ideal) ของ R

9. (5 คะแนน) กำหนดให้ S เป็นริงย่อย (subring) ของริง (ring) R และ I เป็นไอดีล (ideal) ของ R จงใช้ **ทฤษฎีบทสมสัณฐานบทที่หนึ่งของริง (first isomorphism theorem for rings)** พิสูจน์ว่า

$$S/(S \cap I) \quad \cong (S+I)/I$$

ข้อสอบคัดเลือกเข้าศึกษาในบัณฑิตวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักสูตรปริญญาโท หรือปริญญาเอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์

วิชา Linear Algebra

วัน

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ..............................

สมัครหลักสูตร..

คะแนนสอบ		35

คำชี้แจง

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 2 ตอน **ตอนที่ 1** มี 1 ข้อ 11 คะแนน **ตอนที่ 2** มี 4 ข้อ 24 คะแนน คะแนนรวม 35 คะแนน จำนวน 6 หน้า
2. เขียนชื่อ – นามสกุล และ เลขประจำตัวสอบ **ทุกหน้า**
3. **ห้าม ดึง** และ **ห้าม ฉีก**กระดาษข้อสอบออกจากกัน**โดยเด็ดขาด**

สัญลักษณ์

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$M_n(\mathbb{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์บน $\mathbb{R}$ มิติ $n \times n$ ทั้งหมด

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ..

ตอนที่ 1 (11 คะแนน)

1. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าข้อความเป็นจริง จงเขียนพิสูจน์ข้อความ ถ้าข้อความเป็นเท็จ จงยกตัวอย่างที่แสดงว่าข้อความเป็นเท็จพร้อมคำอธิบาย (2+3+3+3=11 คะแนน)

1.1) ให้ U เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า $\mathbb{R}^3 \setminus U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \notin U\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ ด้วย

1.2) ให้ v เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, v\right\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ ก็ต่อเมื่อ $v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

1.3) ถ้า U_1, U_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ ที่มีมิติเท่ากับ 2 และ $U_1 \neq U_2$ แล้ว $U_1 \cap U_2$ เป็นปริภูมิย่อยที่มีมิติเท่ากับ 1

1.4) ให้ A เป็นเมทริกซ์บน $\mathbb{R}$ ขนาด 2×3 ที่ไม่ใช่เมทริกซ์ศูนย์ จะได้ว่า $\operatorname{rank}(A) = 2$

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ.......................................

ตอนที่ 2 (24 คะแนน)

จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

2. พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ $V = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ มีอนุพันธ์ทุกอันดับ$\}$

จงพิจารณาว่า $W = \{f \in V \mid (x^2+1)f''(x) - xf'(x) = e^x f(x)$ ทุก $x \in \mathbb{R}\}$

เป็นปริภูมิย่อยของ V หรือไม่ (6 คะแนน)

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ..

---

3. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ $A \in M_n(\mathbb{R})$ มีสมบัติว่ามีจำนวนเต็มบวก $k \geq 2$ ซึ่งทำให้ $A^k = 0$ แต่ $A^{k-1} \neq 0$ จงแสดงว่าเมทริกซ์ $I, A, \ldots, A^{k-1}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (6 คะแนน)

4. ให้ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ เป็นการแปลงเชิงเส้นที่กำหนดโดย

$T((1,0,0)) = (1,1,2,0)$, $T((1,1,0)) = (1,-1,2,1)$ และ $T((1,1,1)) = (2,4,4,-1)$

จงหาฐานหลักสำหรับเรนจ์ (range) และฐานหลักสำหรับปริภูมิสู่ศูนย์ (null space) ของ T (6 คะแนน)

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ..

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

5.1) จงหาเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) P ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

(4 คะแนน)

5.2) จงหา A^{24} (2 คะแนน)

ข้อสอบคัดเลือกเข้าศึกษาในบัณฑิตวิทยาลัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์

วิชา Mathematical Analysis

-- --------------------

คะแนนสอบ		35

<u>คำชี้แจง</u>

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 5 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน คะแนนรวม 35 คะแนน
2. เขียนชื่อ – นามสกุล และ เลขประจำตัวสอบ **<u>ทุกหน้า</u>**
3. **ห้าม ดึง** และ **ห้าม ฉีก**กระดาษข้อสอบออกจากกัน**โดยเด็ดขาด**

กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

1. ให้ (a_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{2}$

   จงแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ..................................

2. ให้ (a_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n < \infty$

จงแสดงว่า $\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right)$ เป็นลำดับโคชี (Cauchy Sequence)

ชื่อ - นามสกุล.. เลขประจำตัวสอบ.................................

3. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่ง $f(0) > 0$

   จงแสดงว่ามี $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > \varepsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $|x| < \delta$

4. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่จุด $a \in \mathbb{R}$

   ให้ $g(x) = (x-a)f(x)$ จงพิจารณาว่า g สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด a หรือไม่ จงอธิบาย

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

5.1. ถ้า $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาปริพันธ์เชิงรีมันน์ได้ (Riemann integrable)

แล้วฟังก์ชัน $F:(0,1)\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ สำหรับทุก } x\in(0,1)$$

สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $(0,1)$

5.2. ถ้า $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ และ $g:[0,1]\to[0,1]$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาปริพันธ์เชิงรีมันน์ได้

แล้ว $f\circ g:[0,1]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาปริพันธ์เชิงรีมันน์ได้